



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ŘÍZENÍ NEHOLONOMNÍCH MECHANISMŮ**

NONHOLONOMIC MECHANISMS CONTROL

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Tomáš Mareček

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

**BRNO 2018**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Tomáš Mareček**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.**  
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Řízení neholonomních mechanismů

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Sestavení kinematických rovnic neholonomního mechanismu, například robotického hada, s využitím prostředků diferenciální geometrie. Řízení pomocí vektorových polí, diskuse lokální říditelnosti. Návrh elementárního motion planning algoritmu. Simulace pohybu ve vhodném softwaru.

### Cíle bakalářské práce:

Sestavení matematického řídicího modelu. Studium geometrické teorie řízení. Návrh elementárního motion planning algoritmu. Simulace pohybu ve vhodném softwaru.

### Seznam doporučené literatury:

JEAN, Frédéric. Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. New York: Springer, 2014. ISBN 978-331-9086-897.

KOLÁŘ, Ivan. Úvod do globální analýzy. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2003. ISBN 80-21-3205-7.

MURRAY, Richard M., Li ZEXIANG and Shankar SASTRY. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, 1994. ISBN 08-493-7981-4.

SELIG, J. M. Geometric fundamentals of robotics. 2nd ed. New York: Springer, 2005. ISBN 03-87-0874-7.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá teorií řízení neholonomních mechanismů. Na příkladech je ukázáno použití základních operací z diferenciální geometrie a teorie Lieových grup a algeber. Pro model tříčlankového hada jsou sestaveny kinematické rovnice a pomocí prostředků diferenciální geometrie je odvozen neholonomní řídicí systém. Operací Lieova závorka jsou odvozena další nezávislá vektorová pole pro ověření lokální říditelnosti. V závěru jsou pohyby hada v prostoru animovány pomocí skriptu v programu MATLAB.

## **Summary**

This thesis deals with a control theory of nonholonomic mechanisms. Examples explaining the application of differential geometry notions are provided. More precisely, the area of Lie groups and Lie algebras is employed. Kinematic equations are constructed for a 3-link snake-like robot and a nonholonomic control system is derived in terms of vector fields. Additional vector fields are created by the Lie bracket operation to prove local controllability of the nonholonomic system. Finally, the snake-like robot's moves are animated in MATLAB software.

## **Klíčová slova**

neholonomní mechanika, neholonomní systém, teorie řízení, řídicí systém, hadu podobný robot, Lieova závorka, animace, MATLAB

## **Keywords**

nonholonomic mechanics, nonholonomic system, motion planning, snake-like robot, Lie bracket, animation, MATLAB

MAREČEK, T. *Řízení neholonomních mechanismů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 51 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Řízení neholonomních mechanismů vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Petra Vašíka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Tomáš Mareček





Rád bych zde poděkoval především vedoucímu této práce doc. Mgr. Petru Vašíkovi, Ph.D. za cenné rady, trpělivost, vstřícný přístup a všechnen čas, který mi věnoval.

Tomáš Mareček



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy z diferenciální geometrie</b>	<b>15</b>
2.1	Varieta, mapa, atlas . . . . .	15
2.2	Tečný vektor . . . . .	16
2.3	Vektorová pole na varietě . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Operátory na vektorových polích</b>	<b>21</b>
3.1	Tok vektorového pole . . . . .	21
3.2	Lieova algebra a grupa . . . . .	22
3.3	Lieova závorka . . . . .	22
3.4	Exponenciální zobrazení . . . . .	22
3.5	Adjungované zobrazení . . . . .	23
3.6	Příklady . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Řízení neholonomních systémů</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Model řízení</b>	<b>31</b>
5.1	Model robota . . . . .	31
5.2	Odvození rovnic . . . . .	32
5.3	Kinematické rovnice a řídicí systém . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Motion planning</b>	<b>35</b>
6.1	Po částech konstantní input . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Simulace pohybu hada</b>	<b>39</b>
7.1	Popis programu . . . . .	39
7.2	Vykreslení . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>45</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>47</b>
	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>49</b>
	<b>Seznam příloh</b>	<b>51</b>



# 1 Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá řízením neholonomních mechanismů z hlediska diferenciální geometrie, zejména pak aplikací dosažených poznatků na modelu tříčlankového hada pohybujícího se po rovinné ploše, který je opatřen pasivními kolečky uprostřed každého článku a který je řízen otáčením kloubů pomocí servomotorů.

S problematikou řízení mechanismů se lze dnes setkat v celé řadě odvětví a oborů, ať už ve strojírenství, jehož nedílnou součástí se s nástupem robotiky staly nejrůznější manipulátory, zdravotnictví, kde se můžeme setkat s celou řadou vysoce sofistikovaných chirurgických robotů, nebo krizovém managementu, kde se uplatňuje řízení robotů například při záchraně lidí ze zříčených budov po zemětřesení. Zde můžou neholonomní mechanismy hrát velkou roli, jelikož mají skvělé předpoklady pro dosažení jinak těžko dostupných nebo nebezpečných míst.

Tato práce si klade za cíl sestavit řídicí model tříčlankového hada a následně pro tento model nalézt řídicí algoritmus, který by model přemístil z počátečního bodu do námi zvoleného koncového bodu. Dosažené poznatky budou využity k napsání skriptu v programu MATLAB, který bude nalezený řídicí algoritmus realizovat a vykreslovat tak pohyb hada v čase.

Tato práce začíná definováním základních pojmů z oblasti diferenciální geometrie, které budou dále využity pro sestavení řídicího systému. Pro řízení neholonomních mechanismů z hlediska diferenciální geometrie je stěžejní pojem tok generovaný vektorovým polem, který je definován ve třetí kapitole. Dále jsou v této kapitole uvedeny pojmy Lieova grupa a algebra, Lieova závorka, adjungované a exponenciální zobrazení. Tyto pojmy jsou důležité pro řízení po částech konstantním inputem a jsou demonstrovány na několika ukázkových příkladech. Lokální říditelnosti se věnuje čtvrtá kapitola. Následně jsou odvozeny kinematické rovnice, které popisují pohyb modelu hada a jsou odvozena řídicí vektorová pole, kterými lze pohyb modelu řídit. Jelikož ale díky své konstrukci nelze řídicími vektorovými poli hadem pohybovat do jakékoliv konfigurace v prostoru, musí se řídicí vektorová pole doplnit o další nezávislá vektorová pole, která lze vytvořit operací Lieova závorka. Tomuto problému je věnována šestá kapitola, na jejímž konci je zmíněn další druh řízení, a to řízení pomocí po částech konstantního inputu. Poslední kapitola je věnována popisu vytvořeného programu a ukázce vykreslování pohybu hada v  $x$ -ovém směru souřadného systému.



## 2 Základní pojmy z diferenciální geometrie

Pro pochopení teorie řízení neholonomních mechanismů nejprve uveďme několik stěžejních pojmů a definic z oblasti diferenciální geometrie, které budeme v textu dále používat a na kterých je založen náš přístup k problematice řízení. V této kapitole bylo čerpáno ze zdrojů [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

### 2.1 Varieta, mapa, atlas

**Definice 2.1** Topologickým prostorem nazveme dvojici  $(\Omega, \tau)$ , kde  $\Omega$  je množina a  $\tau$  je systém podmnožin s následujícími vlastnostmi:

- (i)  $\emptyset \in \tau$  a  $\Omega \in \tau$ .
- (ii) Sjednocení libovolného počtu množin z  $\tau$  leží v  $\tau$ .
- (iii) Průnik konečného počtu množin z  $\tau$  leží v  $\tau$ .

Systém s těmito vlastnostmi nazveme *topologie* na  $\Omega$  a prvky z  $\tau$  nazveme *otevřenou množinou*.

**Definice 2.2** *Otevřené okolí* bodu  $x \in \Omega$  je jakákoliv otevřená množina  $U \in \tau$  taková, že  $x \in U$ .

**Definice 2.3** *Hausdorffův prostor* je topologický prostor, ve kterém pro každé dva body  $x, y$  existují okolí  $U$  a  $V$  taková, že  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definice 2.4** *Topologická  $n$ -rozměrná varieta*  $M$  je Hausdorffův prostor se spočetnou bází, kde pro každý bod  $p \in M$  existuje otevřené okolí  $U \subset M$  a homeomorfismus  $\phi$  z  $U$  na otevřeném okolí  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .

*Poznámka:* Číslo  $n$  budeme nazývat dimenzí variety a budeme ji značit  $\dim M = n$ .

**Definice 2.5** Dvojici  $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$  budeme nazývat *mapa*.

*Poznámka:* Zobrazení  $\phi(U)$  z množiny  $U$  dané  $n$ -ticí  $(\phi^1, \dots, \phi^n)$  nazveme lokálními souřadnicemi variety  $M$  a budeme je zapisovat  $(x^1, \dots, x^n) = (x^i)$ .

**Definice 2.6** *Hladký atlas* na topologické  $n$ -rozměrné varietě  $M$  je množina map  $A = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ , kde  $I$  je množina indexů s následujícími vlastnostmi:

- (i) Hladký atlas  $A$  pokrývá celou topologickou varietu  $M$ , tj.

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i. \quad (2.1)$$

(ii) Pro všechny  $(U_i, \phi_i), (U_k, \phi_k) \in A$ , kde  $U_i \cap U_k \neq \emptyset$ , je zobrazení

$$\phi_{ik} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi_{ik} = \phi_k \circ \phi_i^{-1} \quad (2.2)$$

hladké. To znamená, že existují derivace všech řádů a jsou spojité.

*Poznámka:* Zobrazení  $\phi_{ik}$  budeme nazývat přechodové funkce.

*Poznámka:* Mapa  $(U_0, \phi_0)$  je slučitelná s atlasem  $A = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ , jestliže každá přechodová funkce  $\phi_{0i}$  je hladká.

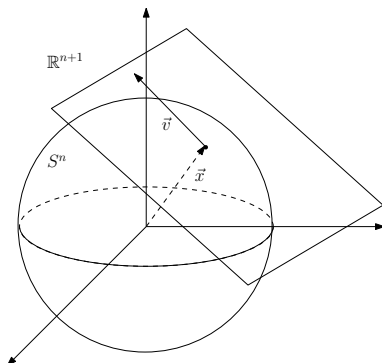
**Definice 2.7** Atlas  $A$  nazveme *úplným*, pokud obsahuje všechny mapy s ním slučitelné.

**Definice 2.8** *Hladká varieta* je topologická varieta spolu s úplným hladkým atlasem.

*Poznámka:* V případě tříčlankového hada popsaného v kapitole 5 je konfigurační prostor  $M = \mathbb{R}^2 \times (S^1)^3$  hada hladkou varietou dimenze  $\dim M = 5$ .

## 2.2 Tečný vektor

V následujícím odstavci uvedeme definice základních pojmů diferenciální geometrie jako je tečný vektor, tečný prostor a vektorové pole. Definice tečného prostoru variety částečně sleduje intuitivní geometrickou představu tečné roviny k povrchu znázorněnou na obrázku níže. Tečný prostor v bodě  $\vec{x}$  by se potom definoval jako  $T_{\vec{x}}S^n = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}$ .



Obrázek 1: Tečný prostor pro sféru  $S^n$  v  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Pro naše účely je však vhodnější definovat tečný prostor tak, aby byl spjatý pouze s varietou, tj. nezávislý na prostorech vyšší dimenze. K tomu využijeme zejména pojem hladké funkce na varietě. Možností, jak definovat tečný prostor je více, ale ukazuje se, že pro variety konečných dimenzí jsou si všechny definice vzájemně ekvivalentní.

**Definice 2.9** *Křivkou*  $\sigma(t)$  *na varietě*  $M$  je hladké zobrazení  $\sigma : I \rightarrow M$  z otevřeného intervalu  $I \subset \mathbb{R}$  na varietu  $M$ , kde  $t \in I$  je spojitý reálný parametr a  $\sigma$  je odpovídající množina bodů na  $M$ .

**Definice 2.10** Dvě křivky  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  se dotýkají v bodě  $p \in M$  pokud splňují:

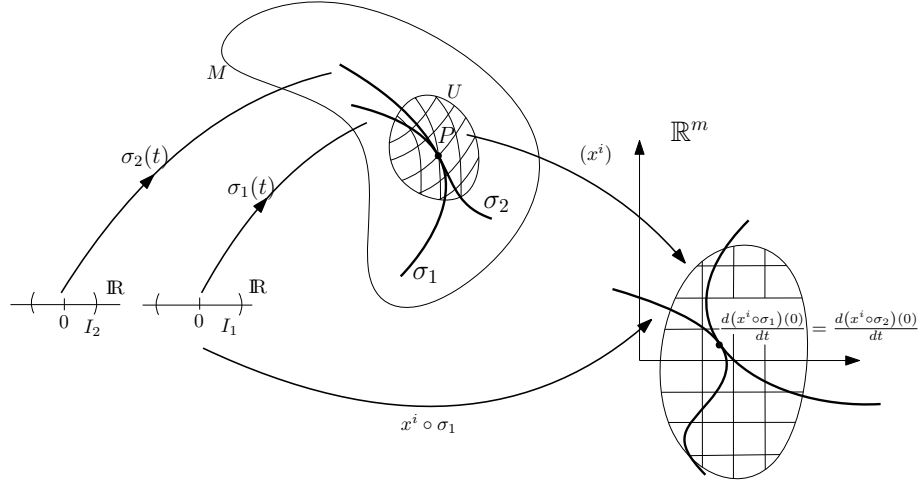
$$(i) \quad \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$$

(ii) v souřadnicovém okolí  $U$  bodu  $p$  s lokálními souřadnicemi  $(x^i)$  pro dvojici křivek  $\sigma_1, \sigma_2$  platí:

$$\frac{d(x^i \circ \sigma_1)(0)}{dt} = \frac{d(x^i \circ \sigma_2)(0)}{dt} \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$



*Poznámka:* Lze ukázat, že tato definice nezávisí na volbě  $(x^i)$ .



Obrázek 2: Dotyk křivek  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ .

**Definice 2.11** *Tečný vektor* v bodě  $p \in M$  je třídou ekvivalence takových křivek na  $M$ , které se dotýkají v bodě  $p$ .

*Poznámka:* Třidu ekvivalence konkrétní křivky  $\sigma(t)$  označíme jako  $[\sigma]$ .

*Poznámka:* Pokud  $\sigma(t_1)$ ,  $t_1 \in I_1$  a  $\sigma(t_2)$ ,  $t_2 \in I_2$  jsou dvě různé parametrizace křivky  $\sigma(t)$  na varietě  $M$  takové, že  $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$  v bodě  $p \in M$ , potom platí, že tečné vektory  $v_1$  a  $v_2$  v bodě  $p \in M$  těchto parametrizací jsou lineárně závislé (tj.  $v_1 = k \cdot v_2$ , kde  $k \in \mathbb{R}$ ).

**Definice 2.12** *Tečný prostor*  $T_p M$  k varietě  $M$  v bodě  $p \in M$  je množina všech tečných vektorů v bodě  $p$ .

**Definice 2.13** *Tečný bandl* je disjunktní sjednocení všech tečných prostorů variety:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (2.4)$$

**Definice 2.14** Zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme *funkce na varietě*  $M$ .

*Poznámka:* V lokálních souřadnicích  $(x^i)$  lze funkci  $f$  vyjádřit jako  $f(\phi^{-1}) = f(x_1, \dots, x_2)$ .

**Definice 2.15** Pro tečný vektor  $v \in T_p M$  a libovolnou hladkou funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou na  $U$  je derivaci funkce  $f$  ve směru vektoru  $v$  definována jako:

$$v(f) := \frac{d(\sigma \circ f)(0)}{dt}, \quad (2.5)$$

kde  $\sigma$  je jakákoliv křivka z třídy ekvivalence reprezentované vektorem  $v$ , tj.  $v = [\sigma]$ .

Do této chvíle jsme k problematice tečného vektoru přistupovali spíše z hlediska geometrického. Jiný, spíše algebraický přístup, nám ovšem dává několik velmi zajímavých vlastností pro tečné vektory, které budeme dále využívat. Základní myšlenka tohoto přístupu je založena na využití „derivace ve směru“ (2.5) jako diferenciálního operátoru na prostoru  $C^\infty(M)$  hladkých funkcí na varietě  $M$ .

**Definice 2.16** Derivace  $v$  v bodě  $p \in M$  je zobrazení  $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že:

- (i)  $v(f + g) = v(f) + v(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$
- (ii)  $v(rf) = rv(f), \quad \forall f \in C^\infty(M) \text{ a } \forall r \in \mathbb{R},$
- (iii)  $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$

**Definice 2.17** Množinu všech derivací v bodě  $p \in M$  označme  $D_p M$ .

*Poznámka:* Prostoru derivací  $D_p M$  lze přiřadit strukturu vektorového prostoru definováním součtu vektorů a násobení skalárem takto:

$$(v_1 + v_2)(f) := v_1(f) + v_2(f), \quad (2.6)$$

$$(rv)(f) := rv(f), \quad (2.7)$$

$\forall v_1, v_2, v \in D_p M, f \in C^\infty(M) \text{ a } r \in \mathbb{R}.$

Dále lze odvodit, že pro vektory z prostoru  $D_p M$  platí:

*Věta 2.1:* Pokud  $v \in D_p M$ , lze tento vektor vyjádřit následujícím způsobem:

$$v = \sum_{\mu=1}^m v(x^\mu) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p, \quad (2.8)$$

kde  $\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p, \mu = 1, 2, \dots, m = \dim M$  jsou báze vektory  $D_p M$  a  $(x^\mu)$  jsou lokální souřadnice v bodě  $p$ .

*Věta 2.2:* Lineární zobrazení  $\nu : T_p M \rightarrow D_p M$  definované vztahem (2.5) jako

$$\nu(v)(f) := \frac{d(\sigma \circ f)(0)}{dt}, \quad \text{kde } [\sigma] = v,$$

je isomorfismus.

*Poznámka:* Jelikož  $T_p M$  a  $D_p M$  jsou isomorfní, můžeme složky  $v^\mu$  vektoru  $v$  vyjádřit jako:

$$v^\mu := v(x^\mu) = \frac{d(x^\mu \circ \sigma(t))(0)}{dt}, \quad \text{kde } [\sigma] = v. \quad (2.9)$$

## 2.3 Vektorová pole na varietě

**Definice 2.18** Necht  $TM$  je tečný bandl variety  $M$ . Vektorové pole  $X$  na hladké varietě  $M$  je hladké zobrazení, které každému bodu  $a \in M$  přiřadí tečný vektor  $X_p \in T_p M$ .

*Poznámka:* hladké zobrazení z definice znamená, že pro všechny funkce  $f \in C^\infty(M)$  je zobrazení  $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$  definované jako

$$(Xf)(p) := X_p(f) \quad (2.10)$$

hladké.

*Poznámka:* Pravá část rovnice představuje derivaci funkce  $f$  ve směru vektoru  $X_p \in T_p M$  definovanou v (2.5).

*Poznámka:* Zobrazení  $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme *derivací funkce  $f$*  ve směru vektorového pole  $X$ .

Dále lze ukázat, že pro lokální souřadnice  $(x^\mu)$  na souřadnicovém okolí  $U$  bodu  $p \in M$  lze vektorové pole vyjádřit ve tvaru

$$X = \sum_{\mu=1}^m X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.11)$$

kde  $X^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, m$  jsou hladké funkce na souřadnicovém okolí  $U$ .

**Definice 2.19** Množinu všech vektorových polí na varietě  $M$  označme jako  $\mathcal{X}(M)$ .



# 3 Operátory na vektorových polích

V následující kapitole je definován tok vektorového pole, Lieova grupa a algebra, které jsou dále využity k definici operátorů na vektorových polích - Lieova závorka, exp a Ad. Na konci kapitoly jsou uvedeny tři příklady ukazující použití definovaných pojmů na konkrétních vektorových polích. Bylo čerpáno ze zdrojů [6], [2], [8], [9], [10].

## 3.1 Tok vektorového pole

**Definice 3.1** *Integrální křivka* vektorového pole  $X$  je křivka  $\gamma : I \rightarrow M$ , kde  $I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0$ , taková, že

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in I. \quad (3.1)$$

*Poznámka:* Pokud existují dvě řešení  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$  a  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$  definovaná na dvou intervalech obsahující nulu, potom  $\gamma_1 = \gamma_2$  pro každé  $t \in I_1 \cap I_2$ .

*Poznámka:* Rovnice (3.1) je obyčejná diferenciální rovnice.

*Poznámka:* Z vět o existenci a jednoznačnosti pro řešení ODR potom plyne, že pro každou počáteční podmínku existuje jednoznačně určená integrální křivka hladkého vektorového pole definovaná na nějakém otevřeném intervalu.

*Věta 3.1:* Nechť  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Uvažujme Cauchyho počáteční úlohu:

$$\dot{p}(t) = X(p(t)), \quad p(0) = p_0. \quad (3.2)$$

Potom pro jakýkoliv bod  $p_0 \in M$  existuje takové  $\delta > 0$ , že  $\sigma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  je řešením počáteční úlohy. Toto řešení označíme jako  $\gamma(t, p_0)$ .

*Poznámka:* Zobrazení  $(t, p) \rightarrow \gamma(t, p_0)$  je hladké na okolí  $(0, p_0)$ .

**Definice 3.2** *Maximální řešení* je takové, které nelze rozšířit na větší interval  $J$  takový, že  $I \subset J$ .

**Definice 3.3** Vektorové pole  $X \in \mathcal{X}(M)$  se nazývá *úplné*, jestliže pro každou počáteční podmínku  $p_0 \in M$  Cauchyho úlohy (3.2) je maximální řešení  $\sigma(t, p_0)$  definováno na intervalu  $I = \mathbb{R}$ .

**Definice 3.4** Nechť  $X \in \mathcal{X}(M)$  je vektorové pole. Potom množinu zobrazení

$$\Phi_t : M \rightarrow M, \quad (3.3)$$

$$\Phi_t(p) = \gamma(t, p), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

nazýváme *tokem generovaným vektorovým polem*  $X$ .

*Věta 3.2:* Nechť  $\gamma(t, p)$  je integrální křivka procházející bodem  $p$  v čase  $t = 0$ . Potom pro tok  $\Phi_t : M \rightarrow M$  platí následující vztahy:

$$\Phi_0 = Id, \quad (3.5)$$

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

$$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_t(p)}{\partial t} = X(\Phi_t(p)), \quad \Phi_0(p) = p, \quad \forall p \in M. \quad (3.8)$$

## 3.2 Lieova algebra a grupa

**Definice 3.5** *Lieova grupa*  $G$  je hladká varieta s vlastnostmi grupy, kde násobení  $G \times G \rightarrow G$  a inverze  $G \rightarrow G$  jsou hladká zobrazení.

**Definice 3.6** *Lieovu algebru*  $\mathfrak{g}$  definujeme jako vektorový prostor  $V$  nad  $\mathbb{R}$  spolu s bilineární operací  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ , která splňuje:

- (i)  $[X, Y] = -[Y, X]$
- (ii)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in V.$

*Poznámka:* Operaci  $[\cdot, \cdot]$  nazveme *Lieova závorka*.

*Poznámka:* Vlastnost (i) nazveme *antikomutativita* a vlastnost (ii) *Jacobiho identita*.

## 3.3 Lieova závorka

**Definice 3.7** Necht  $\mathcal{X}(M)$  je množina vektorových polí na varietě  $M$ . Definujme operaci  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  jako:

$$[X, Y] = X(Yf) - Y(Xf), \quad (3.9)$$

kde  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  a  $Xf$  (resp.  $Yf$ ) je derivace funkce ve směru vektorového pole  $X$  (resp.  $Y$ ) ze vztahu (2.10).

*Poznámka:* Pokud  $X^i(x)$  a  $Y^i(x)$  jsou lokální souřadnice polí  $X$  a  $Y$ , pak operace  $[X, Y]$  má tvar:

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.10)$$

**Věta 3.3:** Množina  $\mathcal{X}(M)$  všech vektorových polí  $X$  na varietě  $M$  spolu s výše definovanou operací  $[\cdot, \cdot]$  tvoří Lieovu algebru a operace  $[\cdot, \cdot]$  splňuje vlastnosti Lieovy závorky.

## 3.4 Exponenciální zobrazení

**Definice 3.8** Necht  $G$  je Lieova grupa a  $\mathfrak{g}$  její Lieova algebra. Potom definujeme *exponenciální zobrazení*  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  jako

$$\exp(X) = \gamma_X(1), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad (3.11)$$

kde  $\gamma_X(t)$  je jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy  $G$ .

Pro Lieovu algebru vektorových polí  $\mathcal{X}(M)$  na varietě  $M$  můžeme exponenciální zobrazení vyjádřit následujícím způsobem.

**Definice 3.9** Necht  $M$  je hladká varieta,  $p \in M$ ,  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Dále necht  $\gamma$  je integrální křivka taková, že  $\gamma(0) = p$  a  $\dot{\gamma}(t) = X$ . Exponenciální zobrazení  $\exp_p(X) : \mathcal{X}(M) \rightarrow M$  potom definujeme takto:

$$\exp_p(X) = \gamma(1). \quad (3.12)$$

Zobrazení  $\exp_p(X)$  tedy vyjadřuje jednotkový posun z bodu  $p \in M$  po integrální křivce  $\gamma(t)$ .

Tok  $\Phi_t$  generovaný vektorovým polem  $X$  lze tedy chápat jako operátor na Lieově algebře vektorových polí na varietě  $M$ . Tok  $\Phi_t$  lze potom díky (3.12) přepsat do exponenciálního tvaru  $\Phi_t := e^{tX}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  a vztahy (3.5)-(3.8) lze vyjádřit následujícím způsobem ([6], s. 49):

$$e^{0X} = Id, \quad (3.13)$$

$$e^{tX} \circ e^{sX} = e^{sX} \circ e^{tX} = e^{(t+s)X}, \quad (3.14)$$

$$(e^{tX})^{-1} = e^{-tX}, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} e^{tX}(p) = X(e^{tX}(p)), \quad \forall p \in M. \quad (3.16)$$

## 3.5 Adjungované zobrazení

**Definice 3.10** Necht  $a \in G$ . *Konjugaci* nebo taky *vnitřní automorfismus*  $\text{conj}_a : G \rightarrow G$  definujeme jako

$$\text{conj}_a(x) = axa^{-1}. \quad (3.17)$$

**Definice 3.11** Pro  $a \in G$  definujeme zobrazení  $\text{Ad}_g = (\text{conj}_a)' = T_e(\text{conj}_a) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ .

*Poznámka:*  $T_e$  je tečné zobrazení v jednotkovém prvku na Lieově grupě.

**Definice 3.12**  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  je reprezentace nazývaná *Adjungovanou reprezentací* grupy  $G$ .

*Poznámka:*  $GL(\mathfrak{g})$  je grupa všech automorfismů na Lieově algebře  $\mathfrak{g}$ .

**Definice 3.13** Definujeme *adjungovanou reprezentaci*  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  Lieovy algebry  $\mathfrak{g}$  jako

$$\text{ad} = \text{Ad}' = T_e \text{Ad}. \quad (3.18)$$

*Poznámka:* Lze ukázat (viz např. [10], s. 38), že  $\text{ad}_X Y = [X, Y]$  pro  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

Adjungované zobrazení z definice 3.11 můžeme pro tok vektorového pole  $\Phi_t = e^{tX}$  a vektorová pole  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{e^{tX}} Y &= e^{tX} Y e^{tX} = e^{t \text{ad}_X} Y = Y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [X, \dots, [X, Y]] \\ &\simeq Y + t[X, Y] + \frac{t^2}{2!} [X, [X, Y]] + o(t^3), \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde  $\text{ad}_X Y = [X, Y]$  je Lieova závorka vektorových polí  $X$  a  $Y$ . Takto vyjádřené Adjungované zobrazení je velmi specifický případ použití, který je součástí řízení s po částech konstantním inputem, který je zmíněn v kapitole 6.

## 3.6 Příklady

### Příklad 1

Uvažujme vektorové pole ve tvaru:

$$X = (x - y - z) \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y} + (3x + z) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.20)$$

Tok generovaný polem  $X$  určíme jako řešení soustavy ODR

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - z \\ \dot{y} &= x + y \\ \dot{z} &= 3x + z.\end{aligned}$$

Nejprve vyjádříme charakteristickou rovnici:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 + 3(1 - \lambda) + (1 - \lambda) = (1 - \lambda) \cdot (4 + (1 - \lambda)^2) = 0.$$

Odtud snadno získáme vlastní čísla  $\lambda$ :  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ .

Nyní nalezneme vlastní vektory  $u_i$  ke všem vlastním číslům  $\lambda_i$ .

$$\lambda_1 = 1 : u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i : \text{komplexní vlastní vektor k vlastnímu číslu } \lambda_2 \text{ je } w = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Odtud vyjádříme dva reálné vlastní vektory } u_2 = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} \text{ a } u_3 = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení je potom tvaru:

$$\gamma(t) = e^t \left( C_1 \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

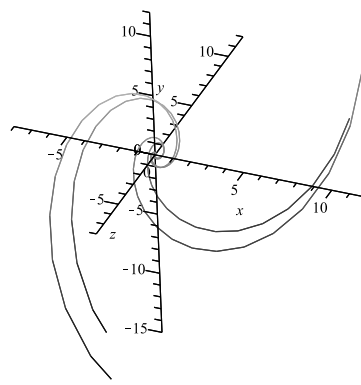
Partikulární řešení určíme z počáteční podmínky, tedy že  $\gamma(0) = p_0 = (x \ y \ z)^T$ . Dosažením počáteční podmínky určíme konstanty  $C_1, C_2, C_3$ :

$$C_1 = \frac{y}{4} + \frac{z}{4}, \quad C_2 = \frac{x}{2}, \quad C_3 = \frac{3}{4}y + \frac{z}{4}.$$



Dosažením získáme tok  $\Phi_t$  generovaný vektorovým polem  $X$ :

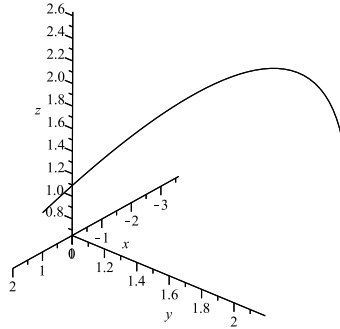
$$\begin{aligned} x &= e^t \left( \cos(2t) x + \sin(2t) \left( -\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \right) \right) \\ \Phi_t(p_0) : \quad y &= \frac{1}{2} e^t \left( x \sin(2t) - \left( -\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \right) \cos(2t) - \frac{z}{2} + \frac{3}{2} y \right) \\ z &= \frac{1}{2} e^t \left( 3x \sin(2t) - 3 \left( -\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \right) \cos(2t) + \frac{z}{2} - \frac{3}{2} y \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$



Obrázek 3: Tok generovaný vektorovým polem  $X$ .

Nyní spočítáme funkci  $\exp_p(X)$  například pro bod  $p_0 = [1, 1, 1]$  dosažením  $t = 1$  do  $\Phi_t(p_0)$ :

$$\begin{aligned} \exp_{p_0}(X) &= \left[ e(\cos(2) - \sin(2)), \frac{1}{2} e(\sin(2) + \cos(2) + 1), \frac{1}{2} e(3 \sin(2) + 3 \cos(2) - 1) \right] \\ &\approx [-3.603, 2.029, 0.652]. \end{aligned}$$



Obrázek 4: Funkce  $\exp_{p_0}(X)$ .

## Příklad 2

Uvažujme vektorové pole ve tvaru:

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4} z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.22)$$

Tok generovaný vektorovým polem  $X$  určíme jako řešení soustavy ODR

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= x \\ \dot{z} &= \frac{1}{4}z.\end{aligned}$$

Snadno dopočítáme řešení

1. rovnice:

$$x(t) = C_x,$$

2. rovnice:

$$y(t) = C_x t + C_y,$$

3. rovnice:

$$z(t) = C_z e^{\frac{t}{4}}.$$

Partikulární řešení určíme z počáteční podmínky, tedy že  $\gamma(0) = p_0 = (x \ y \ z)^T$ . Dosazením počáteční podmínky určíme konstanty  $C_x, C_y, C_z$ :

$$C_x = x, \quad C_y = y, \quad C_z = z. \quad (3.23)$$

Dosazením konstant získáme tok  $\Phi_t$  generovaný vektorovým polem  $X$ :

$$\begin{aligned}x &= x \\ \Phi_t(p_0) : \quad y &= xt + y \\ z &= z e^{\frac{t}{4}}.\end{aligned} \quad (3.24)$$

Nyní spočítáme funkci  $\exp_{p_0}(X)$  například pro bod  $p_0 = [\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}]$  dosazením  $t = 1$  do  $\Phi_t(p_0)$ .

$$\begin{aligned}\exp_{p_0}(X) &= \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4} e^{1/4} \right] \\ &\approx [0.5, 1.5, 0.321].\end{aligned} \quad (3.25)$$

Označme vektorové pole z Příkladu 1 (resp. 2)  $X_1$  (resp.  $X_2$ ). Lieova závorka polí  $X_1, X_2$  potom je:

$$\begin{aligned}[X_2, X_1] &= -x \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{4}z \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4}z \frac{\partial}{\partial z} - \\ &\quad - \left( (x - y - z) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4}(3x + z) \frac{\partial}{\partial z} - (x + \frac{1}{4}z) \frac{\partial}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{3}{4}x \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= - (x + \frac{z}{4}) \frac{\partial}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{3x}{4} \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned} \quad (3.26)$$

### Příklad 3

Uvažujme vektorová pole ve tvaru

$$B_1 = X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{4} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.27)$$

$$B_2 = X_2 = (2x - y) \frac{\partial}{\partial x} + (4x - 2y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.28)$$

Lieovy závorky až do řádu 4 jsou

$$B_3 = [X_1, X_2] = -x \frac{\partial}{\partial x} + (-4x + y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.29)$$

$$B_4 = [X_1, [X_1, X_2]] = 2x \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.30)$$

$$B_5 = [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]] = 0. \quad (3.31)$$

$$(3.32)$$

Podle (3.19) máme

$$\text{Ad}_{e^{tX_1}} X_2 = X_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [X_1, \dots, [X_1, X_2]]. \quad (3.33)$$

Využijeme toho, že prostor generovaný bází  $B = B_1, \dots, B_5$  je *nilpotentní řádu 3*. Nilpotentní prostor řádu 3 znamená, že Lieovy závorky mezi vektorovými poli  $X_1$  a  $X_2$  větší než řádu 3 jsou 0. Tj.

$$[X_1, \dots, [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}] \dots] = 0 \quad \forall p > k. \quad (3.34)$$

Díky tomu se z nekonečného rozvoje stává rozvoj konečný a rovnici (3.33) můžeme zjednodušit:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{e^{tX_1}} X_2 &= X_2 + t[X_1, X_2] + \frac{1}{2}t^2[X_1, [X_1, X_2]] = \\ &= [(-t + 2)x - y] \frac{\partial}{\partial x} + [(t - 2)^2x + (t - 2)y] \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.35)$$



## 4 Řízení neholonomních systémů

V následující kapitole je popsána problematika řízení a lokální říditelnosti neholonomních systémů. Bylo čerpáno ze zdrojů [11], [12].

Uvažujme *řídící systém*  $\Sigma$  pro stavový prostor ve tvaru

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(p), \quad p \in M, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

kde  $m \in \mathbb{Z}, m > 1$ ,  $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{X}(M)$  a kde varieta  $M$  je stavovým prostorem.

**Definice 4.1** *Neholonomní systém* je řídící systém, pro který platí, že

$$\dim \Delta(p) < \dim M = n \quad p \in M, \quad (4.2)$$

kde  $\Delta(p) = \text{span}\{X_1(p), \dots, X_m(p)\} \subset T_p M$ .

*Poznámka:* Pokud  $\dim \Delta(p)$  je konstantní  $\forall p \in M$ ,  $\Delta(p)$  nazveme *distribucí*.

**Definice 4.2** *Trajektorie* systému  $\Sigma$  je křivka  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ,  $T \in \mathbb{R}$ , pro kterou existuje funkce  $u(\cdot) \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  taková, že  $\gamma$  je řešením soustavy ODR

$$\dot{p}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(p(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

Funkci  $u(\cdot)$  nazveme *kontrolní fukncí* závislou na  $\gamma$ .

**Definice 4.3** Systém je říditelný, pokud pro jakékoliv dva body  $p_0, p_f \in M$  a  $T \in \mathbb{R}$  existuje trajektorie taková, že  $\gamma(0) = p_0$  a  $\gamma(T) = p_f$ .

*Poznámka:* Neholonomní systém obecně říditelný není. Jeho lokální říditelnost ověříme doplněním řídících vektorových o další lineárně nezávislá vektorová pole pomocí operátoru Lieova závorka.

**Definice 4.4** Neholonomní systém je *lokálně říditelný* v bodě  $p \in M$ , pokud lze dosáhnout jemu blízkých bodů za libovolně malý čas a lze v nich zůstat libovolně dlouho ([12], s. 329).

*Věta 4.1:* Řídící systém je lokálně říditelný v bodě  $p \in M$ , pokud

$$\text{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}(p) = T_p M, \quad \forall p \in M, \quad (4.4)$$

kde  $\text{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$  je Lieova algebra generovaná vektorovými poli  $X_1, \dots, X_m$ .

*Poznámka:* Lieovu algebru  $\text{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$  nazveme Lieovou algebrou říditelnosti.

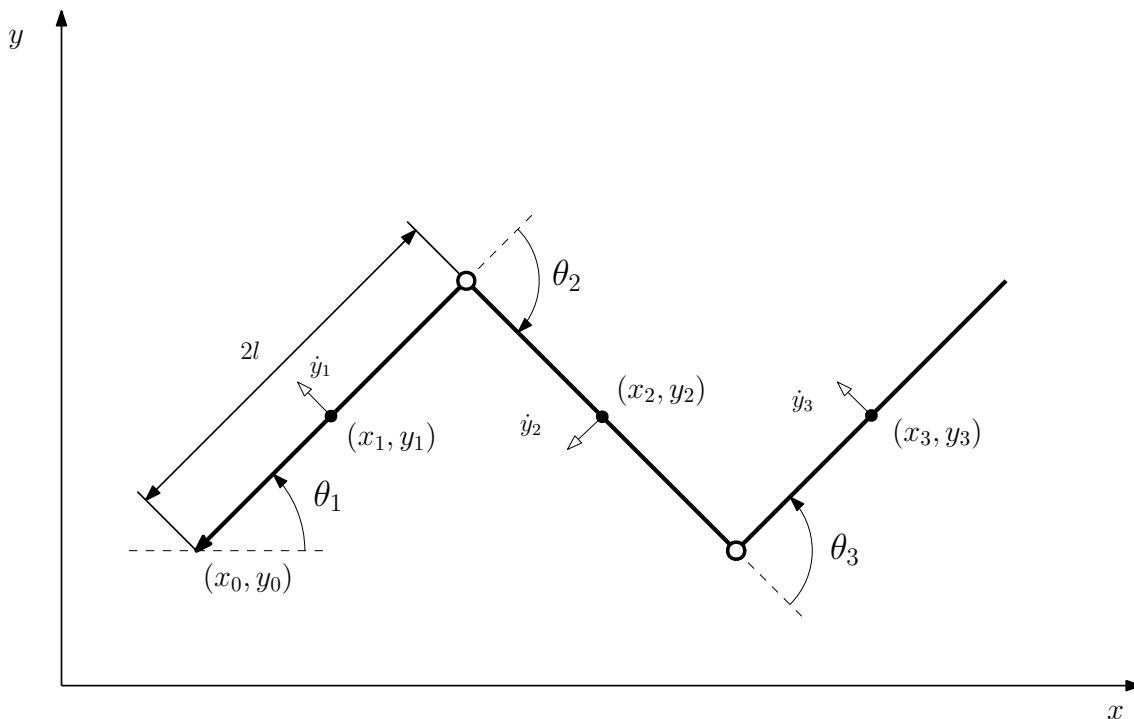
*Poznámka:* Lieova algebra říditelnosti je nejmenší Lieova algebra generovaná vektorovými poli  $X_1, \dots, X_m$ .



# 5 Model řízení

V následující kapitole jsou odvozeny kinematické rovnice pro tříčlankového hada. Na konci kapitoly je z těchto rovnic odvozen řídicí systém hada. Bylo čerpáno ze zdrojů [12], [11].

## 5.1 Model robota



Obrázek 5: Model tříčlankového hada s pasivními kolečky

Hadu podobný robot je mechanismus, který se obecně skládá z  $n$  článků spojených říditelnými klouby a páru pasivních koleček připevněném na každém článku. V obecném případě může být každý článek jinak dlouhý a pozice pasivních koleček může být různá. Pohyb hada je následně zajišťován pouze ohybem kloubů a podmínkou, že kolečka nesmí prokluzovat. Hadu podobného robota budeme dále nazývat pouze had.

Tato práce se bude zabývat pouze případem tříčlankového hada.

Model tříčlankového hada se skládá ze tří článků konstantní délky  $2l$  a páru pasivních koleček umístěných ve středech článků. Články modelu jsou spojeny aktivními klouby ovládanými pomocí servomotorků.

Souřadnice hlavového bodu v globálním souřadnicovém systému  $x, y$  jsou označeny  $(x_0, y_0)$ . Úhel natočení prvního článku vůči ose  $x$  je označen  $\theta_1$ . Úhly natočení jednotlivých kloubů vzhledem k předchozímu článku jsou označeny  $\theta_2$  a  $\theta_3$ . Konfigurace hada je potom jednoznačně popsána pěti souřadnicemi, které určují bod  $p$  na hladké varietě  $M$  dimenze  $\dim M = 5$ ,

$$p = (x_0, y_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^2 \times (S^1)^3. \quad (5.1)$$

## 5.2 Odvození rovnic

V dalším budou vyjádřeny kinematické rovnice tříčlankového hada.

Vyjádříme nejprve obecně polohu  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $i$ -tého kolečka,

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + 2l \sum_{k=1}^{i-1} \cos\left(\sum_{l=1}^k \theta_l\right) + l \cos\left(\sum_{m=1}^i \theta_m\right), \\ y_i &= y_0 + 2l \sum_{k=1}^{i-1} \sin\left(\sum_{l=1}^k \theta_l\right) + l \sin\left(\sum_{m=1}^i \theta_m\right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Změnu polohy  $i$ -tého kolečka v čase získáme derivací polohy  $i$ -tého kolečka podle času:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_0 - 2l \sum_{k=1}^{i-1} \left( \sin\left(\sum_{l=1}^k \theta_l\right) \cdot \sum_{j=1}^k \dot{\theta}_j \right) - l \sin\left(\sum_{m=1}^i \theta_m\right) \cdot \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j, \\ \dot{y}_i &= \dot{y}_0 - 2l \sum_{k=1}^{i-1} \left( \cos\left(\sum_{l=1}^k \theta_l\right) \cdot \sum_{j=1}^k \dot{\theta}_j \right) - l \cos\left(\sum_{m=1}^i \theta_m\right) \cdot \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pohyb hada po rovině je omezen podmínkou pasivních koleček. U těch by nemělo docházet ke smýkání, ale pouze k odvalování po podložce. To znamená, že normálová složka  $\dot{y}_i$  vektoru rychlosti  $i$ -tého kolečka je rovna 0. To se dá ekvivalentně vyjádřit pomocí skalárního součinu takto:

$$\mathbf{n}_i \cdot (\dot{x}_i, \dot{y}_i)^T = 0. \quad (5.4)$$

Dále vyjádříme směrový vektor  $\mathbf{s}_i$  pro  $i$ -té kolečko a z něj normálový vektor  $\mathbf{n}_i$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &= \left( \cos\left(\sum_{j=1}^i \theta_j\right), \sin\left(\sum_{j=1}^i \theta_j\right) \right), \\ \mathbf{n}_i &= \left( -\sin\left(\sum_{j=1}^i \theta_j\right), \cos\left(\sum_{j=1}^i \theta_j\right) \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Po dosazení do rovnice (5.4) vzniká soustava rovnic ve tvaru:

$$-\dot{x}_i \cdot \sin\left(\sum_{j=1}^i \theta_j\right) + \dot{y}_i \cdot \cos\left(\sum_{j=1}^i \theta_j\right) = 0. \quad (5.6)$$

Dosazením derivací ze vztahu (5.3) dostáváme soustavu tří diferenciálních rovnic o pěti neznámých, kterou zapíšeme v následujícím maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & l & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 2l \cos \theta_2 + l & l & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 2l \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l \cos(\theta_3) + l & 2l \cos(\theta_3) + l & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$



### 5.3 Kinematické rovnice a řídicí systém

Kinematické rovnice pro model tříčlankového hada mohou být vyjádřeny různými způsoby. V této práci je uveden tvar rovnic popisující rychlost natočení úhlů  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  a  $\theta_3$  v závislosti na rychlosti změny polohy  $x_0, y_0$  v globálním souřadnicovém systému  $x, y$ . Pro jednoduchost budeme dále uvažovat délku článku  $2l = 2$ .

Upravme nejprve soustavu rovnic (5.7) převedením členů s  $x_0, y_0$  do tvaru

$$A \cdot \dot{\theta} = B(\theta) \cdot (\dot{x}_0, \dot{y}_0)^T, \quad (5.8)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 \cos \theta_2 + 1 & 1 & 0 \\ 2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2 \cos \theta_3 + 1 & \cos \theta_3 + 1 & \end{pmatrix},$$

$$\dot{\theta} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}, \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{pmatrix}.$$

Díky tomu, že  $A$  je dolní trojúhelníková matice a tedy regulární, můžeme vynásobit rovnici (5.8) zleva inverzní maticí  $A^{-1}$ . Dostáváme

$$\dot{\theta} = A^{-1} \cdot B(\theta) \cdot (\dot{x}_0, \dot{y}_0)^T, \quad (5.9)$$

kde

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ -(2 \cos \theta_2 + 1) \cdot \sin \theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2) & (2 \cos \theta_2 + 1) \cdot \cos \theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ (4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + 2 \cos \theta_2 - 2 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \sin \theta_1 - & -(4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + 2 \cos \theta_2 - 2 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \cos \theta_1 + \\ -(2 \cos \theta_3 + 1) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & + (2 \cos \theta_3 + 1) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{pmatrix}.$$

Tento tvar kinematických rovnic modelu ukazuje závislost  $\dot{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , na  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ .

Úpravami soustavy rovnic do tvaru (5.9) jsme směřovali k zavedení parametrů  $u_1 = \dot{x}_0$  a  $u_2 = \dot{y}_0$ . Soustavu rovnic (5.9) pak můžeme přepsat do tvaru

$$\dot{p} = X_1(p) \cdot u_1 + X_2(p) \cdot u_2, \quad (5.10)$$

kde  $\dot{p} = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)^T$  a  $X_1, X_2$  jsou řídicí vektorová pole ve tvaru

$$X_1 = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + [-(2 \cos \theta_2 + 1) \cdot \sin \theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)] \frac{\partial}{\partial \theta_2} +$$

$$+ [(4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + 2 \cos \theta_2 - 2 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \sin \theta_1 -$$

$$- (2 \cos \theta_3 + 1) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \frac{\partial}{\partial \theta_3}, \quad (5.11a)$$

$$X_2 = 0 \frac{\partial}{\partial x} + 1 \frac{\partial}{\partial y} - \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + [(2 \cos \theta_2 + 1) \cdot \cos \theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \frac{\partial}{\partial \theta_2} -$$

$$- [(4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + 2 \cos \theta_2 - 2 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \cos \theta_1 -$$

$$- (2 \cos \theta_3 + 1) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \frac{\partial}{\partial \theta_3}. \quad (5.11b)$$

Tuto soustavu rovnic nazveme *řídící systém* a parametry  $u_1$  a  $u_2$  *inputy* nebo *kontrolní parametry*. Jelikož dimenze  $\dim \Delta(p)$  řídicího systému (5.10) je menší než  $\dim M$ , je tento řídicí systém neholonomní. To znamená, že pro počáteční bod pohybu  $p_0 \in M$  jsou některé konfigurace hada nedosažitelné. Pomocí operace Lieova závorka ale lze tento systém rozšířit tak, aby bylo možné lokálně dosáhnout jakékoliv konfigurace.

## 6 Motion planning

Základní myšlenka motion planning spočívá v nalezení takového vektoru kontrolních parametrů  $u$ , aby se robot pohnul z počátečního bodu  $p_0$  do koncového bodu  $p_f$ . Bylo čerpáno ze zdrojů [11], [12], [13].

Aplikací Lieovy závorky na řídicí systém (5.10) lze vytvořit nové nezávislé vektorové pole  $[X_1, X_2]$ . Další aplikací lze vytvořit další dvě nezávislá vektorová pole  $[X_1, [X_1, X_2]]$  a  $[X_2, [X_1, X_2]]$ .

**Definice 6.1** *Regulární bod*  $p_r \in M$  je bod, pro který je matice vektorových polí  $G(p) = (X_1(p), \dots, X_n(p))$ , kde  $n = \dim M$  a  $X_i \in \mathcal{X}(M)$ , regulární.

Množina všech regulárních bodů potom tvoří distribuci  $\Delta(p) = \text{span}\{B_1(p), \dots, B_5(p)\}$  generovanou řídicími vektorovými poli  $X_1, X_2$ , kde

$$B_1 = X_1, \quad (6.1)$$

$$B_2 = X_2, \quad (6.2)$$

$$B_3 = [X_1, X_2], \quad (6.3)$$

$$B_4 = [X_1, [X_1, X_2]], \quad (6.4)$$

$$B_5 = [X_2, [X_1, X_2]]. \quad (6.5)$$

Rozšířený řídicí systém hada lze zapsat do tvaru:

$$\dot{p} = B_1(p) \cdot w_1 + \dots + B_5(p) \cdot w_5, \quad w_i \in \mathbb{R}. \quad (6.6)$$

Tento řídicí systém již je lokálně říditelný. Je ovšem nutné poznamenat, že z konstrukčního hlediska nelze hadem pohybovat podél toků generovaných vektorovými poli vytvořenými Lieovou závorkou. Pomocí periodického inputu, popsaného na konci kapitoly, je ale možné vytvořit takovou sérii pohybů ve směru základních vektorových polí  $X_1$  a  $X_2$ , která bude pohyby podél těchto toků realizovat.

Zvolme nyní počáteční bod  $p_0 = (0, 0, 0, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ .

Vyčíslením vektorových polí v  $p_0$  dostáváme

$$B_1(p_0) = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \sqrt{3} \frac{\partial}{\partial \theta_3}, \quad (6.7)$$

$$B_2(p_0) = 0 \frac{\partial}{\partial x} + 1 \frac{\partial}{\partial y} - 1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_3}, \quad (6.8)$$

$$B_3(p_0) = 0 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} + 1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - 3 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + 3 \frac{\partial}{\partial \theta_3}, \quad (6.9)$$

$$B_4(p_0) = 0 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} - 1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{9}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{15}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_3}, \quad (6.10)$$

$$B_5(p_0) = 0 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_3}. \quad (6.11)$$

Lokální řízení hada z počáteční konfigurace  $p_0$  do koncové konfigurace  $p_f$  potom znamená řešení soustavy rovnic ze vztahu (6.6), neboli nalezení vhodné kombinace vektorových polí  $B_1, \dots, B_5$ , abychom dosáhli požadované koncové konfigurace.

Příkladem takového řízení je jednotkový posun hada ve směru osy  $x$  z počáteční konfigurace do koncové za podmínky, že se změní pouze  $x$ -ová souřadnice hada. Tedy je nutné nalézt vhodnou lineární kombinací vektorových polí tak, aby  $\dot{p} = (1, 0, 0, 0, 0)$ , kde  $\dot{p}$  je jednotková změna v souřadnici  $x$  za jednotku času. Pro náš zvolený bod  $p_0$  tedy dostáváme:

$$\dot{p} = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \approx 1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0.8660 \cdot B_3 + 0.8660 \cdot B_4 - 0.5000 \cdot B_5. \quad (6.12)$$

Obdobně lze dosáhnout pohybu i ve směru osy  $y$  zvolením  $\dot{p} = (0, 1, 0, 0, 0)$ .

## Periodický input

Periodický input je jeden z možných způsobů realizace pohybu podél vektorových polí vzniklých aplikací Lieovy závorky. Pro řídicí systém ze vztahu (5.10) definujeme periodický input jako vektor kontrolních parametrů ve tvaru

$$u(t) = (-A\omega \sin \omega t, A\omega \cos \omega t), \quad (6.13)$$

kde  $A \in \mathbb{R}$  je vhodně zvolená dostatečně malá amplituda a  $\omega \in \mathbb{R}$  ([13], s. 123). Odvození tohoto vzorce lze nalézt v [12].

Pro pohyb ve směru  $[X_1, X_2]$  potom dostáváme řídicí systém

$$\dot{p} = (X_1, X_2) \begin{pmatrix} -A\omega \sin \omega t \\ A\omega \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Obdobně pro pohyb ve směru  $[X_1, [X_1, X_2]]$

$$\dot{p} = \left( X_1, (X_1, X_2) \cdot \begin{pmatrix} -A\omega \sin \omega t \\ A\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -A_2\omega_2 \sin \omega_2 t \\ A_2\omega_2 \cos \omega_2 t \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

## 6.1 Po částech konstantní input

Další metodou pro řízení neholonomních systémů je řízení s po částech konstantním inputem. V této metodě budou využity operátory  $\text{Ad}$ ,  $\text{ad}$  a  $\exp$  definované v kapitole 3. Významnými zdroji pro tento oddíl jsou [12], [11], [14], [15].

Principem této metody je nalezení vektoru řídicích parametrů

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & 0 \leq t < t_1 \\ u_2 & t_1 \leq t < t_2, \\ \vdots & \end{cases} \quad (6.16)$$

kde  $u_1, u_2, \dots \in \mathbb{R}$  jsou vektory s konstantními složkami.

Uvažujme řídicí systém ve tvaru

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(p), \quad p \in M \quad (6.17)$$

a vektorová pole  $B_1, B_2 \dots B_n$ , které jsou bází Philipa Halla ([12], s.344) Lieovy algebry  $Lie\{X_1, \dots, X_m\}$ .

Druhý krok spočívá v sestrojení  $n$ -tice  $(q_1, \dots, q_n)$  pro všechny  $p^{\text{final}}$  takové, že

$$p^{\text{final}} = e^{q_n B_n} \circ \dots \circ e^{q_1 B_1}(p^{\text{init}}), \quad (6.18)$$

kde  $e^{q_i B_i}$  je tok generovaný vektorovým polem  $B_i$  (viz kapitola 3) a  $n$  je dimenze variety  $M$ .

Definujeme rozšířený řídicí systém ve tvaru

$$\dot{p} = v_1 B_1 + \dots + v_n B_n, \quad (6.19)$$

kde  $v = (v_1, \dots, v_n)$  je řídicí vektor.

Dále předpokládejme, že existují funkce  $h_1(t), \dots, h_n(t)$ , definované pro  $t \in [0, T]$  takové, že tok  $S^v(t)$ , pro který platí  $p^{\text{final}} = S^v(T)(p^{\text{init}})$ , lze vyjádřit jako

$$S^v(t) = e^{h_n(t)B_n} e^{h_{n-1}(t)B_{n-1}} \dots e^{h_2(t)B_2} e^{h_1(t)B_1}. \quad (6.20)$$

Tok  $S^v(t)$  dále vyhovuje diferenciální rovnici

$$\dot{S}^v(t) = \sum_{i=1}^n v_i B_i(S^v(t)) \quad S^v(0) = Id. \quad (6.21)$$

Derivací rovnice (6.20) získáme diferenciální rovnici:

$$\dot{S}^v(t) = \sum_{j=1}^n e^{h_n B_n} \dots e^{h_j B_j} \dot{h}_j B_j e^{h_{j-1} B_{j-1}} \dots e^{h_1 B_1} \quad (6.22)$$

Z rovnice (6.20) vyjádříme členy  $e^{h_n B_n} \dots e^{h_j B_j}$  a dostáváme:

$$\dot{S}^v(t) = \sum_{j=1}^n S(t) e^{-h_1 B_1} \dots e^{-h_{j-1} B_{j-1}} \dot{h}_j B_j e^{h_{j-1} B_{j-1}} \dots e^{h_1 B_1} \quad (6.23)$$

Z kapitoly 3.5 následně vyplývá, že

$$\dot{S}^v(t) = \sum_{j=1}^n S(t) \text{Ad}_{\exp(-h_1 B_1) \dots \exp(-h_{j-1} B_{j-1})} \dot{h}_j B_j. \quad (6.24)$$

S pomocí vztahu (3.19) dále můžeme vyjádřit

$$\text{Ad}_{\exp(-h_1 B_1) \dots \exp(-h_{j-1} B_{j-1})} \dot{h}_j B_j = \left( \sum_{k=1}^n p_{j,k}(h) B_k \right) \dot{h}_j, \quad (6.25)$$

kde  $p_{j,k}(h)$  jsou polynomy. Z rovnice (6.25) a (6.21) potom dostáváme

$$\sum_{j=1}^n p_{j,k}(h) \dot{h}_j = v_k \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.26)$$

Toto dále vede na soustavu diferenciálních rovnic

$$\dot{h}_k = Q_k(h_1, \dots, h_{k-1}, v_1, \dots, v_k) \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.27)$$

s počátečními podmínkami  $h_1(0) = \dots = h_n(0) = 0$ . Z této soustavy již můžeme integrací dopočítat funkce  $h_1, \dots, h_n$ . A konečně, prvky hledané  $n$ -tice  $(q_1, \dots, q_n)$  jsou ve tvaru  $q_i = h_i(T)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Tento postup hledání po částech konstantního inputu je však vhodný pouze pro nilpotentní řídicí systém, případně jeho nilpotentní aproximaci [11].

Pokud řídicí systém nilpotentní není, dá se ukázat, že pokud je koncový bod  $p_f$  blízký počátečnímu bodu  $p_0$ , potom metoda řízení po částech konstantním inputem přiblíží původní systém koncovému bodu  $p_f$  alespoň o polovinu. Příklady použití této metody pro různé nilpotentní systémy popisuje Murray v kapitole 8 [12].

Aplikace této metody na modelu tříčlankového hada je ovšem náročná a není cílem této práce. Byla by ovšem dobrým podnětem k dalšímu výzkumu.

# 7 Simulace pohybu hada

Pro simulaci pohybu hada byl vybrán program MATLAB. Cílem bylo vytvořit animaci, která by vykreslovala pohyb hada v čase, a následně takto vykreslený pohyb uložit do souboru formátu `.gif`, aby bylo možné tuto animaci jednoduše vložit například do prezentace. Program MATLAB byl vybrán především pro své široké možnosti konstruování a úpravy grafů, které byly při vytváření animace potřeba. Na začátku této kapitoly jsou uvedeny a okomentovány nejdůležitější části a funkce skriptu. Vytvořená animace pohybu hada je ukázána v posloupnosti obrázků na konci kapitoly.

## 7.1 Popis programu

Vytvořený program je nastaven tak, že animuje řízení hada ve směru osy  $x$  i  $y$ . Pohyb hada je rozdělen na potřebný počet malých posunů ve směrech os  $x$  a  $y$  (viz (6.12)).

### Vstup

Nejdříve jsou definována vektorová pole `[X1,X2,X12,X121,X122]=vector_fields_2`, počáteční bod `initpoint`, délku článku `l`, velikost kroku `step` a koncový bod `xy_end`.

Dále je vytvořen `.gif` soubor pro zápis animace. Ve funkci `vector_fields_2` jsou uloženy řídicí vektorová pole rozšířeného řídicího systému (6.6), které byly spočítány pomocí programu Maple (`3_link_snake.mw`).

Pokud je zadán koncový bod mimo osy  $x$  a  $y$ , je pohyb realizován tak, že had střídavě vykonává pohyb v ose  $x$  a  $y$ , dokud nedosáhne v jedné ze souřadnic koncové hodnoty. Až této hodnoty dosáhne, pohybuje se ve směru druhé osy, dokud nedosáhne koncové hodnoty i v druhé souřadnici.

### Výpočet

V prvním kroku je definována konfigurace hada `p` na začátku pohybu, `p=initpoint`, a proměnné `phi=p(3)`, `alpha=p(4)`, `beta=p(5)`.

Dále je určen `input` neboli vektor řídicích parametrů  $w_i$ .

```
input=input_find(X1,X2,X12,X121,X122,phi,alpha,beta,...  
                [sign(xy_end(1))*0.1 0 0 0 0]');;
```

Nyní jsou vypočítány všechny konfigurace hada, kterými had prochází kroky o velikosti `step` v průběhu pohybu podél toku generovaného vektorovým polem  $B_1, B_2, \dots, B_5$ .

```
[x1,y1,p,iterace1]=push_forward(X1(phi,alpha,beta),l,p,input(1),step);

:

[x122,y122,p,iterace122]=push_forward(X122(phi,alpha,beta),...
l,p,input(5),step);
```

Dále jsou pomocí funkce `plot2gif` postupně vykresleny všechny konfigurace hada z předchozího kroku do 2D grafu a zároveň je funkcí `gif` každá takto vykreslená konfigurace zapsána do souboru `.gif` vytvořeného na začátku programu.

```
plot2gif(hPlot1,x1,y1,iterace1);
```

Na konec se určí nové `phi`, `alpha`, `beta` a celý cyklus se opakuje, dokud koncová pozice hlavového bodu  $(x_0, y_0)$  není rovna `xy_end`.

V programu se nezohledňuje, jestli had v průběhu pohybu neprochází singulárními body. Dále nejsou nastaveny žádné limity pro rozsah otáčení kloubů. To pro určité počáteční konfigurace může způsobit, že pohyb hada vykreslený programem by reálně nebylo možné uskutečnit. I takovýto pohyb je ale vhodné vykreslovat, jelikož program má sloužit především pro ukázkou pohybů hada.

## 7.2 Vykreslení

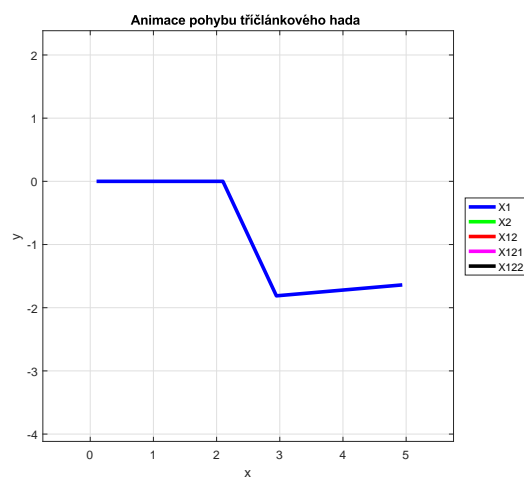
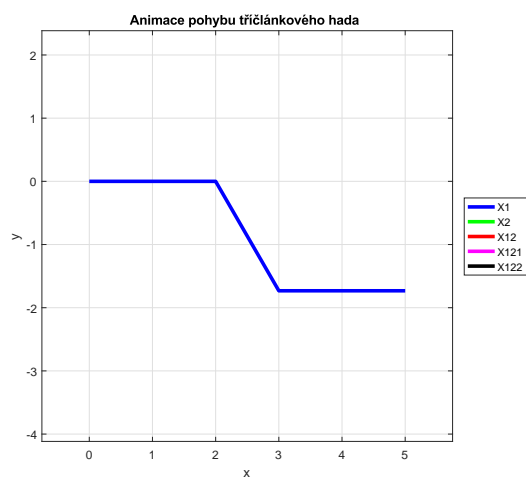
Na následujících obrázcích je ukáзка animace pro posun  $\dot{p} = (0.1, 0, 0, 0, 0)$  ve směru osy  $x$ . Zvolme  $p_0 = (0, 0, 0, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  jako počáteční bod. Na konci pohybu se had posunul do koncového bodu  $p_f = (0.1, 0, 1.7 \cdot 10^{-18}, -1.0472, 1.0472) \simeq (0.1, 0, 0, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ . Konečná konfigurace hada je tedy stejná jako počáteční. Pohyb hada potom odpovídá modelu řízení popsaném v kapitole 6 a

$$\dot{p} = 0.1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \approx 0.1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0.087 \cdot B_3 + 0.087 \cdot B_4 - 0.050 \cdot B_5$$

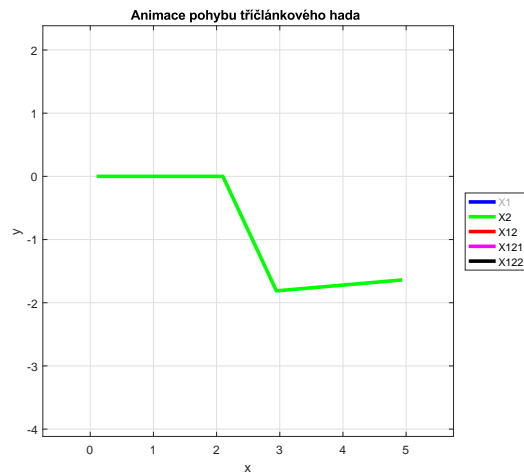
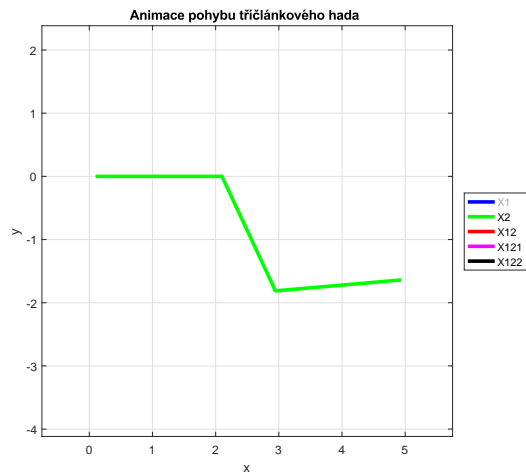
je nalezená lineární kombinace pro  $\dot{p}$ , kde  $B_1=X1$ ,  $B_2=X2$ ,  $B_3=X12$ ,  $B_4=X121$  a  $B_5=X122$ .

Pohyb hada ve směru jednotlivých vektorových polí je pro přehlednost barevně odlišen.



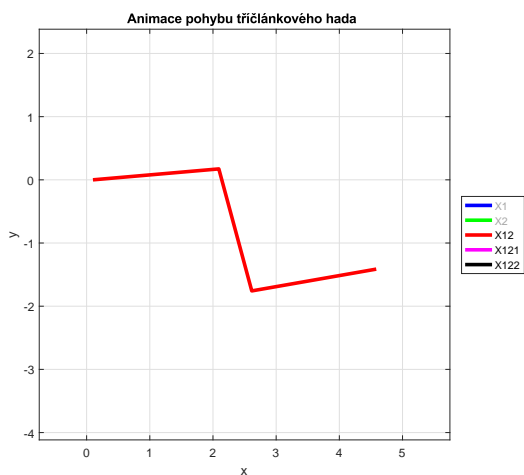
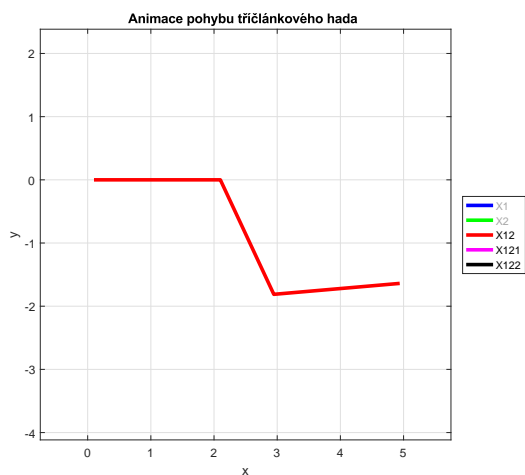


(a) Konfigurace hada na začátku a na konci pohybu ve směru vektorového pole  $X_1$ .

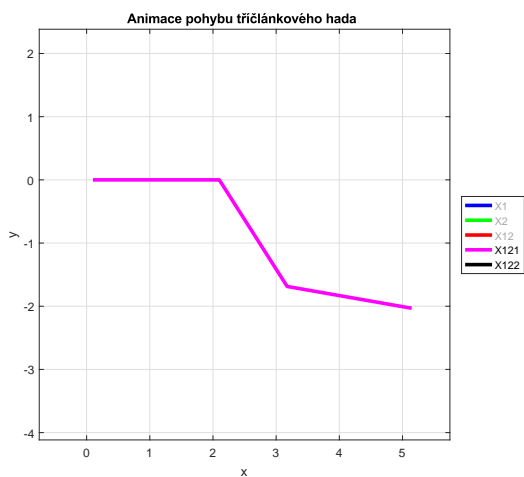
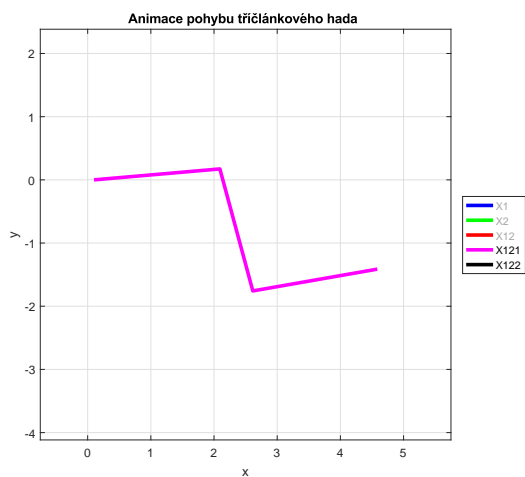


(b) Konfigurace hada na začátku a na konci pohybu ve směru vektorového pole  $X_2$ .

Obrázek 6: Pohyb hada v ose  $x$ .

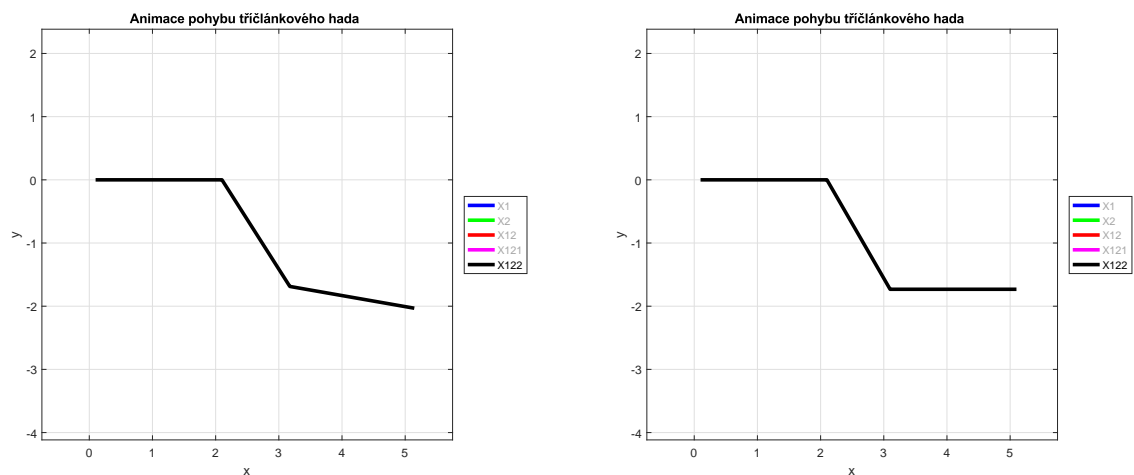


(c) Konfigurace hada na začátku a na konci pohybu ve směru vektorového pole  $[X_1, X_2]$ .



(d) Konfigurace hada na začátku a na konci pohybu ve směru vektorového pole  $[X_1, [X_1, X_2]]$ .

Obrázek 6: Pohyb hada v ose  $x$ .



(e) Konfigurace hada na začátku a na konci pohybu ve směru vektorového pole  $[X_2, [X_1, X_2]]$ .

Obrázek 6: Pohyb hada v ose  $x$ .

Z ukázky pohybu jde vidět, že pro pohyb v ose  $x$  je input  $w_2$  pro vektorové pole  $X_2$  nulový. Dále je patrné, že reálně by se takto had pohybovat nemohl, jelikož pohyby podél toků generovaných Lieovými závorkami nejsou v souladu s neholonomními podmínkami (5.4). Pohyby podél těchto toků lze ovšem realizovat pomocí periodického inputu (viz kapitola 6). Animace tohoto pohybu je v přílohách jako `snake_move_to_point.gif`.



## 8 Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala problematikou řízení neholonomních mechanismů z hlediska diferenciální geometrie a simulací pohybu modelu tříčlankového hada s pasivními kolečky pomocí skriptu vytvořeného v programu MATLAB.

V druhé a třetí kapitole byly definovány základní pojmy jako varieta, tečný vektor, vektorové pole a tok generovaný vektorovým polem. Následně byl popsán operátor  $\text{Ad}$  na Lieových grupách a operátory Lieova závorka,  $\text{ad}$  a  $\exp$  na Lieových algebrách. V závěru třetí kapitoly byly pojmy tok generovaný vektorovým polem, operace Lieova závorka,  $\exp$  a  $\text{Ad}$  ilustrovány na třech jednoduchých příkladech.

Ve čtvrté kapitole byl definován pojem neholonomní systém. Operátor Lieova závorka byl poté využit k ověření, zda neholonomní systém je lokálně říditelný.

Dále byl popsán model tříčlankového hada s pasivními kolečky a byly odvozeny kinematické rovnice popisující jeho pohyb. Aby bylo možné hada řídit, musel být odvozený řídicí systém pomocí operace Lieova závorka doplněn dalšími nezávislými vektorovými poli.

Následně byl navržen základní motion planning algoritmus pro pohyb hada ve směrech os globálního souřadného systému. Dále bylo popsáno, jak by se takto navržený algoritmus realizoval pomocí periodického inputu. V práci je zmíněna i jiná možnost řízení neholonomních mechanismů, a to řízení po částech konstantním inputem. Při popisu této metody byly využity operátory  $\text{Ad}$ ,  $\text{ad}$  a  $\exp$  popsané ve třetí kapitole. Na uvažovaném modelu hada ale tato metoda řízení nebyla aplikována, jelikož by bylo zapotřebí využití nilpotentní aproximace, což ale přesahuje rámec této práce.

Poslední kapitola se věnuje popisu programu, který byl v rámci této práce vytvořen a který vykresluje pohyb hada. V závěru kapitoly je uvedena ukázka animace pohybu hada ve směru osy  $x$ , která byla programem vytvořena pro zadanou počáteční konfiguraci. Tento program byl vytvořen jako skript v programu MATLAB a je možné ho použít pro vykreslení pohybu hada jak v ose  $x$ , tak i v ose  $y$ .



# Seznam použitých zdrojů

1. TU, Loring W. *An Introduction to Manifolds*. 2. vyd. Springer-Verlag New York, 2011. ISBN 978-1-4419-7399-3. Dostupné také z: <https://goo.gl/tjNTk9>.
2. DOUPOVEC, Miroslav. *Jety a konexe v diferenciální geometrii: teze přednášky k profesorskému jmenovacímu řízení v oboru Aplikovaná matematika*. Brno, 2009. ISBN 978-80-214-3850-7. Dostupné také z: <https://goo.gl/3E6X6c>.
3. SCHLICHTKRULL, Henrik. *Differentiable Manifolds*. 1. vyd. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2008. ISBN 9788770789899. Dostupné také z: <https://goo.gl/bKBVkb>.
4. SPIVAK, Michael David. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3. vyd. Publish or Perish, 1999. ISBN 978-0914098706. Dostupné také z: <https://goo.gl/CDgjAg>.
5. PODOLSKÝ, Jiří. *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie* [online]. Praha, 2006 [cit. 2018-05-13]. Dostupné z: <https://goo.gl/xiAP9c>.
6. AGRACHEV, Andrei A.; BARILARI, Davide; BOSCAIN, Ugo. *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry: from Hamiltonian viewpoint* [online]. 2017 [cit. 2018-05-12]. Dostupné z: <https://goo.gl/35jAFd>.
7. ISHAM, Chris J. *Modern Differential Geometry for Physicists*. 2. vyd. Singapore: World Scientific Publishing, 2001. ISBN 981-02-3555-0. Dostupné také z: <https://goo.gl/NQ4Dp8>.
8. HALL, Brian C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Second. Springer International Publishing, 2015. ISBN 978-3-319-13467-3.
9. KIRILLOV, Alexander Jr. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. 1. vyd. Cambridge University Press, 2008. ISBN 978-0521889698. Dostupné také z: <https://goo.gl/G9V3WM>.
10. KOLÁŘ, Ivan; MICHROV, Peter W.; SLOVÁK, Jan. *Natural Operations in Differential Geometry*. 1. vyd. Springer Science & Business Media, 1993. ISBN 9783540562351.
11. JEAN, Frédéric. *Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning*. 1. vyd. New York: Springer, 2014. ISBN 978-3-319-08689-7.
12. MURRAY, Richard M.; LI, Zexiang; SASTRY, S. Shankar. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. 1st ed. Boca Raton: CRC Press, 1993. ISBN 0-8493-7981-4. Dostupné také z: <https://goo.gl/BHYeoY>.
13. NÁVRAT, A.; VAŠÍK, P. On geometric control models of a robotic snake. *Note di Matematica*. 2017, roč. 37, č. Suppl. 1, s. 119–129. ISSN 1123-2536. Dostupné také z: <https://goo.gl/L3oZ4v>.
14. SZEWCZYK, Roman; ZIELIŃSKI, Cezary; KALICZYŃSKA, Małgorzata. *Challenges in Automation, Robotics and Measurement Techniques: Proceedings of AUTO-*

*MATION-2016, March 2-4, 2016, Warsaw, Poland*. 1. vyd. Springer International Publishing, 2016. ISBN 9783319293578.

15. KOUSSOULAS, Nick T.; SKIADAS, Photis. Symbolic computation for mobile robot path planning. *Journal of Symbolic Computation* [online]. 2004, roč. 37, č. 6, s. 761–775 [cit. 2018-02-01]. ISSN 0747-7171. Dostupné z: <https://goo.gl/c5McNu>.



# Seznam použitých zkratek a symbolů

$\Omega$	množina
$\tau$	systém podmnožin
$U, V$	otevřené okolí
$M$	topologická $n$ -rozměrná varieta
$\phi$	homeomorfismus
$\mathbb{R}^n$	$n$ -rozměrný prostor reálných čísel
$A$	hladký atlas na varietě $M$
$I$	množina indexů
$\sigma$	křivka na varietě $M$
$t$	čas
$p$	bod na varietě $M$
$f$	hladká funkce na varietě $M$
$v$	tečný vektor
$\sigma$	třída ekvivalencí křivky $\sigma$
$C^\infty(M)$	prostor hladkých funkcí na varietě $M$
$D_p M$	množina všech derivací v bodě $p$
$Xf$	derivace funkce ve směru vektorového pole
$X$	vektorové pole
$\mathcal{X}(M)$	množina všech vektorových polí na $M$
$\Phi_t$	tok generovaný vektorovým polem $X$
$\exp_p(X)$	exponenciální zobrazení



# Seznam příloh

Přílohy jsou na uloženy na CD, které je součástí práce.

- `snake_move_to_point.m` - skript pro simulaci pohybu
- `snake_move_to_point.gif` - animace pohybu
- `input_find.m` - funkce, která hledá lineární kombinace vektorových polí pro žádaný posun
- `push_forward.m` - funkce, která realizuje pohyb hada podél toku generovaného vektorovým polem
- `plot2gif.m` - funkce, která vykresluje konfigurace hada a zapisuje vykreslené konfigurace do `snake_move_to_point.gif`
- `vector_fields_2.m` - zde jsou uložena vektorová pole potřebná pro řízení
- `gif.m` - skript, který zapíše do daného souboru jeden snímek vykresleného grafu
- `vector_flows.mw` - výpočty a grafy v příkladech v kapitole 3
- `3_link_snake_2.mw` - výpočet řídicích vektorových polí a jejich závorek
- `DifferentialGeometryUSU.mla` - Balíček Maple, obsahující mimo jiné příkazy pro symbolické počítání základních operací z diferenciální geometrie, variet, Lieových grup a Lieových algeber.
- `gif_documentation.html` - dokumentace k funkci `gif.m`
- `gif_documentation.png`
- `gif_documentation_01.png`
- `myfile.gif`
- `gif_documentation.m` - další dokumentace
- `licence.txt`